

# Resumos em Mecânica dos Fluidos: Discurso sobre a Condição de Incompressibilidade

Gustavo Charles P. de Oliveira \*

3 de fevereiro de 2012

## Resumo

Discutimos neste artigo a condição de incompressibilidade em fluidos sob alguns pontos de vista conhecidos.

## 1 Introdução

A incompressibilidade de fluidos é um assunto bastante denso em Mecânica dos Fluidos, sendo apresentado de muitas maneiras pela literatura. Pelas ideias expressas por [4], inferimos que quando um elemento de fluido executa um movimento suave e está submetido a forças apropriadas, é possível que as partículas nele contidas sofram uma limitação de movimento. Se existir tal limitação, diz-se que o elemento de fluido está sujeito à uma *restrição interna*. Dessa maneira, a incompressibilidade é um tipo de restrição ao movimento de fluidos, pois se exige que o campo de velocidades possua divergência nula.

Em geral, a condição de incompressibilidade de um fluido é representada, tacitamente, pela equação matemática

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

ou seja, o resultado de se aplicar o operador divergente aplicado ao campo de velocidades é sempre zero - diz-se também que um campo vetorial satisfazendo (1) é *solenoidal*. Poderíamos nos deter à simples - porém improdutiva - explicação de que fluido incompressível é o mesmo que dizer “fluido que não se comprime”, no entanto, esta sinonímia é, em totalidade, contraproducente. Embora as propriedades de compressibilidade sejam um tópico fértil para discussão, nosso objetivo aqui é fazer uma compilação de interpretações que evocam algum sentido satisfatório a respeito de (1). Nas próximas sessões, apresentaremos algumas ideias contidas na literatura sobre a incompressibilidade de fluidos e uma interpretação diferenciada do tema.

Em concordância com a teoria desenvolvida pela Mecânica do Contínuo, devemos nos adaptar à aceitação da continuidade da matéria, em que um elemento de fluido é uma porção material constituída de partículas que não obedecem à uma determinada organização. Em alguns momentos, referir-nos-emos a um elemento de fluido de maneira geométrica e intuitiva, a fim de remover profundas abstrações matemáticas. Todavia, parcial dedicação será dada a uma formulação um pouco mais robusta. Famanaz ente matemático neste tratado, a menos que se faça menção em contrário,  $\mathbf{v}$  será um campo de velocidades definido no espaço euclidiano tridimensional.

*A priori*, entenderemos o termo *elemento de fluido* como sendo uma porção bem pequena de partículas de fluido que está envolta por uma superfície. Seguindo [1], partiremos de um referencial inicial tal que  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  seja a posição inicial de uma partícula do elemento

---

\*Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica - Universidade do Estado do Rio de Janeiro

de fluido considerado. Identificamos  $\mathbf{x}$  como a posição ocupada por uma partícula de fluido em algum instante de seu movimento. Notadamente, um mapeamento biunívoco associa cada partícula do elemento de fluido a uma única posição no espaço em um tempo fixado. Por notação indicial, esta posição é determinada pelas funções coordenadas

$$x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), \quad i = 1, 2, 3, \quad (2)$$

com a variável  $t$  representando um instante arbitrário de tempo. Na posição inicial, assumimos  $t = 0$ . Em termos gerais, escrevemos

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t), \quad (3)$$

já que a posição final de uma partícula é fruto de sua posição de origem. O campo de velocidades será, por sua vez, avaliado em cada posição  $\mathbf{x}$  e permitido a variar com o tempo. Devido às três componentes da posição, as componentes do vetor velocidade nas três direções também serão funções tais que

$$v_i = v_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad i = 1, 2, 3. \quad (4)$$

O elemento de fluido será representado por  $\Omega = \Omega(t)$ , uma porção de fluido que se move ao longo do tempo no espaço tridimensional. Neste aspecto, vale ressaltar que  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  e suas dimensões são muito pequenas, onde eventos ocorrem em uma escala microscópica. A superfície que o limita será representada por  $\partial\Omega$ .

Em todo o tempo,

$$\frac{D(\cdot)}{Dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla(\cdot)$$

será o operador *Derivada Total*, aplicado à propriedade “.” do fluido.

## 2 Incompressibilidade e Conservação de Massa

Uma das equações fundamentais na Mecânica dos Fluidos é a Equação da Conservação de Massa, aqui apresentada na forma

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (5)$$

onde  $\rho$  é a massa específica do fluido.

De acordo com [2], a Eq. (5) pode ser interpretada em termos de *mudanças no volume de uma dada massa de fluido*. O elemento de fluido  $\Omega$  - que guarda a quantidade de massa formada pelas partículas - muda conforme o resultado do movimento dos pequeníssimos elementos de área  $dS$  que constituem  $\partial\Omega$  segundo

$$\frac{d\Omega(t)}{dt} = \iint_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (6)$$

sendo  $\mathbf{n}$  um vetor unitário normal a  $\partial\Omega$  apontando para fora. Por outro lado, por identidade do Teorema da Divergência, (6) aparece como

$$\frac{d\Omega(t)}{dt} = \iiint_{\Omega(t)} \nabla \cdot \mathbf{v} dV, \quad (7)$$

em que  $dV$  é uma medida infinitesimal de volume.

Dividindo-se a taxa com que o volume de um elemento de fluido está mudando ao longo do tempo (Eq. (7)) pelo próprio volume e passando ao limite obtém-se

$$\lim_{|\Omega| \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega|} \frac{d\Omega(t)}{dt} = \lim_{|\Omega| \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega|} \iiint_{\Omega(t)} \nabla \cdot \mathbf{v} dV = \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (8)$$

Aqui, chamamos atenção para o módulo  $|\Omega|$ , que representa uma quantidade numérica de volume ocupado por  $\Omega$  no espaço. Esta taxa fracionária da mudança de volume do elemento de fluido diz-se ser uma *taxa de expansão* ou *taxa de dilatação*. Este binômio será discutido em outro contexto proposto na Seção 4.

A primeira noção a ser anunciada no discurso provém do fato de podermos usar (5) e perceber que

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{v} \quad (9)$$

implica que a taxa de mudança de massa específica é igual e em sentido oposto à taxa de mudança de volume do elemento de fluido. Não apenas por isso, mas também sustentando a hipótese de que existe uma pressão atuante no seio do elemento de fluido ao longo do movimento, define-se que *um fluido é incompressível quando a massa específica de um elemento de fluido não é afetada por mudanças na pressão*. Uma vez que a massa específica permanece constante ao longo do movimento, tem-se para um fluido incompressível que

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0, \quad (10)$$

ou seja, não há variação de massa específica com o tempo. Assim, é possível reduzir (5) à forma

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (11)$$

verificando que a massa específica se preserva em um volume que permanece com módulo constante.

### 3 Incompressibilidade e “um Modo Peculiar de Explicação”

Sabe-se que (1) pode ser expandida em  $\mathbb{R}^3$  como

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0. \quad (12)$$

Assim, podemos já inferir que a *soma das taxas de mudança de cada uma das componentes de velocidade em relação às direções do espaço sobre as quais estão projetadas é constante e igual a zero*. Vale destacar que a soma anterior não implica que todas as derivadas sejam nulas ao mesmo tempo. Se isolarmos algum termo da soma levando-o ao membro esquerdo, três equações podem resultar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} &= - \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right); \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_2} &= - \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right); \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_3} &= - \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

As três equações são equivalentes e podemos ver que uma variação sempre será equilibrada pelas demais, pois o sinal negativo no membro direito indica que as contribuições somadas de duas variações sempre são iguais ao oposto da terceira.

A fim de não confundir a compreensão, vamos imaginar que trabalhamos com dois volumes:

- i) o *volume de um elemento infinitesimal de fluido*, constituído pelo encarceramento de um espaço no qual habita um conjunto de partículas vizinhas a uma partícula escolhida;
- ii) um volume abstrato, o qual chamaremos de *volume da divergência*, a ser formado geometricamente pela variação da velocidade de cada partícula que constitui o volume do item anterior ao longo de uma mudança de posição.

Neste ponto pode surgir o questionamento sobre o porquê de não analisarmos o que queremos com base na idealização de apenas um volume. Não obstante, intentamos destacar que a velocidade é avaliada pontualmente - em vista da idealização de um meio contínuo. Enquanto que para o volume de fluido olhamos para uma velocidade de conjunto, para o volume abstrato focamo-nos em uma velocidade pontual. Desta forma, queremos analisar um efeito pontual (que ocorre para uma partícula) e descrevê-lo no conjunto (formado por aquelas partículas vizinhas).

Lançando mão de um esboço matemático, vamos definir:

- $\chi$ , uma partícula de fluido;
- $d\mathbf{x}$  um medida de deslocamento infinitesimal do espaço;
- $dt$  uma medida infinitesimal do tempo;
- $v_{i,(\mathbf{x},t)}(\chi)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , a componente de velocidade da partícula  $\chi$  na direção  $i$  avaliada na posição  $\mathbf{x}$  e instante de tempo  $t$  e, similarmente à última,
- $v_{i,(\mathbf{x}+d\mathbf{x},t+dt)}(\chi)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , a componente de velocidade da partícula  $\chi$  na direção  $i$  avaliada na posição  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$  e instante de tempo  $t + dt$ .

Isto é, estamos falando de uma mesma partícula que se moveu no espaço.

Sem perda de sentido, vamos optar por escolher  $\frac{\partial v_i}{\partial x_i} > 0, \forall i$ . Assim, estamos induzindo que as componentes de velocidade  $v_1, v_2$  e  $v_3$  da partícula  $\chi$  assumem valores nos intervalos reais definidos por:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1 &:= \|v_{1,(\mathbf{x},t)}(\chi)\| \leq \zeta_1 \leq \|v_{1,(\mathbf{x}+d\mathbf{x},t+dt)}(\chi)\|; \\ \mathcal{I}_2 &:= \|v_{2,(\mathbf{x},t)}(\chi)\| \leq \zeta_2 \leq \|v_{2,(\mathbf{x}+d\mathbf{x},t+dt)}(\chi)\|; \\ \mathcal{I}_3 &:= \|v_{3,(\mathbf{x},t)}(\chi)\| \leq \zeta_3 \leq \|v_{3,(\mathbf{x}+d\mathbf{x},t+dt)}(\chi)\|.\end{aligned}$$

No entanto, sabemos que cada componente do vetor velocidade é sua projeção sobre cada direção. Geometricamente, podemos visualizar o volume abstrato do qual estamos falando através das Figs. 3 e 3, que forçamos, por generalização, a serem paralelepípedos. A primeira figura mostra o paralelepípedo  $\Omega_1$ , determinado pelos pontos

$$A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1,$$

ao passo que a segunda mostra o paralelepípedo  $\Omega_2$ , determinado pelos pontos

$$A_2B_2C_2D_2E_2F_2G_2H_2,$$

donde temos que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{G_1D_1} &= \mathbf{v}_{(\mathbf{x},t)}(\chi); \\ \overrightarrow{G_2D_2} &= \mathbf{v}_{(\mathbf{x}+d\mathbf{x},t+dt)}(\chi).\end{aligned}$$

Em ambas as figuras, fazemos coincidir a posição da partícula  $\chi$  com o vértice  $G$ , isto é,

$$(\mathbf{x}, t) \equiv G_1 \quad \text{e} \quad (\mathbf{x} + d\mathbf{x}, t + dt) \equiv G_2. \quad (14)$$

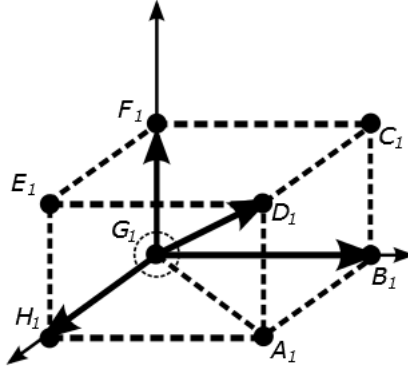


Figura 1: Paralelepípedo determinando o volume  $|\Omega_1|$ , onde  $(x, t) \equiv G_1$ .

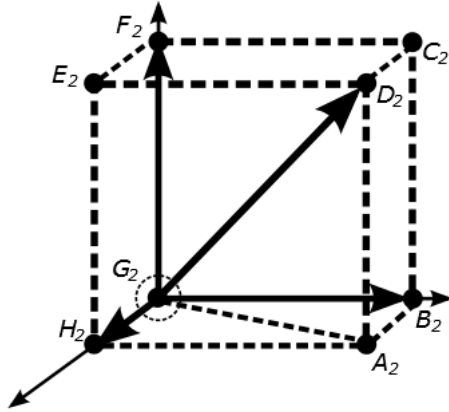


Figura 2: Paralelepípedo determinando o volume  $|\Omega_2|$ , onde  $(x + dx, t + dt) \equiv G_2$ .

A superposição de  $\Omega_2$  sobre  $\Omega_1$  torna clara a aparição de  $\mathcal{I}_1$ ,  $\mathcal{I}_2$  e  $\mathcal{I}_3$  conforme podemos ver pela Fig. 3 pelos deslocamentos criados pela mudança de posição dos pontos. Neste esquema,  $\Omega_1$  está representado pelo paralelepípedo na cor cinza. Uma vez que as duas configurações do elemento de fluido estão em dois tempos distintos, seguem

$$\Omega_1 = \Omega(t) \quad \text{e} \quad \Omega_2 = \Omega(t + dt).$$

Agora, afirmamos o seguinte:

$$|\Omega_1| = |\Omega_2|, \tag{15}$$

ou seja, o volume de ambos os paralelepípedos é o mesmo. Isto é verdade por causa das equivalências em (13). Nas figuras, exageramos a variação na direção  $i = 3$  para fins explicativos. Notemos que de acordo com (13) qualquer modificação sentida em uma direção deve ser instantaneamente compensada por modificações nas outras direções. Como assumimos que nenhuma derivada era nula, o comportamento de  $\frac{\partial v_3}{\partial x_3}$  em crescer abruptamente faz alongar  $\mathcal{I}_3$ , ao passo que  $\frac{\partial v_1}{\partial x_1}$  e  $\frac{\partial v_2}{\partial x_2}$  contribuem para manter o equilíbrio da divergência fazendo  $\mathcal{I}_1$  e  $\mathcal{I}_2$  encolherem. Mais uma vez, vale ressaltar a independência de cada contribuição, no sentido que  $\frac{\partial v_1}{\partial x_1}$  e  $\frac{\partial v_2}{\partial x_2}$  não variam necessariamente por uma mesma taxa de decrescimento, o que não obriga nem  $\mathcal{I}_1$  nem  $\mathcal{I}_2$  a encolherem por um mesmo comprimento. Na Fig. 3,  $G_{1,2}$  representa a coincidência da partícula com este vértice nos dois instantes de tempo (cf. Eq.

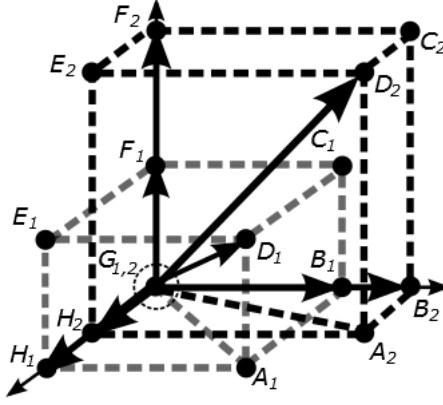


Figura 3: Superposição dos dois paralelepípedos, em que  $|\Omega_1| = |\Omega_2|$ .

(14)) e, mais claramente,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &\equiv m(\overline{H_1H_2}); \\ \mathcal{I}_2 &\equiv m(\overline{B_1B_2}); \\ \mathcal{I}_3 &\equiv m(\overline{F_1F_2}), \end{aligned} \quad (16)$$

com  $m(\cdot)$  designando a “medida” do segmento “.”.

Esta noção de preservação de volume determinada pelos encolhimentos e alongamentos das arestas dos paralelepípedos abstratos conforme descrevemos aqui é o que caracteriza a restrição ao movimento de uma partícula de fluido. A explicação para a divergência nula da velocidade (Eq. (1)) segue, portanto, do fato de haver uma limitação para a partícula se movimentar, um certo impedimento de potencial, de modo que uma certa “energia” que impeliria a partícula a se mover age sobre ela até um certo alcance.

Faz-se útil tecer especulações sobre essa tal energia que se encontra armazenada no espaço compreendido por  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ . Haja vista que  $\|\overrightarrow{G_1D_1}\|$  e  $\|\overrightarrow{G_2D_2}\|$  decorrem dos produtos internos

$$\|\overrightarrow{G_1D_1}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}_{(x,t)}(\chi), \mathbf{v}_{(x,t)}(\chi) \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 [v_{i,(x,t)}(\chi)]^2} \quad (17)$$

e

$$\|\overrightarrow{G_1D_1}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}_{(x+d\mathbf{x},t+dt)}(\chi), \mathbf{v}_{(x+d\mathbf{x},t+dt)}(\chi) \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 [v_{i,(x+d\mathbf{x},t+dt)}(\chi)]^2}, \quad (18)$$

uma quantia que permanece limitada. Assim, digamos que a “capacidade” de  $\chi$  se movimentar existente nos instantes  $t$  e  $t + dt$  seja dada, respectivamente, por

$$\|\|\mathbf{v}\|\|(\chi, t) \text{ e } \|\|\mathbf{v}\|\|(\chi, t + dt).$$

Por conta da preservação dos volumes, é praticamente aceitável argumentar que essa capacidade permanecerá limitada durante todo o movimento da partícula  $\chi$  ao longo de um intervalo de tempo  $t \leq \tau \leq t + dt$ .

Ao reconduzir nossa discussão para um volume infinitesimal de fluido que abandona a geometria paralelepipedal e se forma pela união de partículas vizinhas, saciar-nos-emos com a simples transferência de compreensão para várias partículas, ao invés de uma. Suponhamos que exista um conjunto  $\mathfrak{X} := \chi \cup \{\chi_m\}$ ,  $0 < m < L$  e  $L$  pequeno, cujas partículas  $\chi_m$

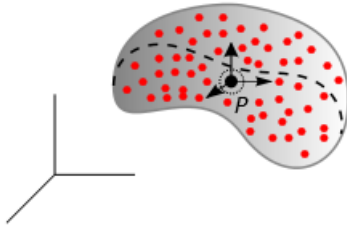


Figura 4: Envoltória convexa delimitando um volume de fluido contendo  $\mathfrak{X}$ .

sejam vizinhas a  $\chi$ , de maneira que seja possível perfazer uma envoltória convexa em torno da posição que  $\chi$  ocupa em um instante de tempo  $t \in \tau$ . Essa envoltória formará um volume de fluido, dentro do qual todas as partículas  $\chi_m$  estão confinadas. Cada uma possuiria, por certo, uma capacidade de se movimentar diferente, pois ocuparia um lugar distinto do espaço, com componentes de velocidade diferentes. Daí, segue que as propriedades de alongamento ou encolhimento de  $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$  e  $\mathcal{I}_3$  atribuídas a  $\chi$  podem ser também atribuídas a todo o conjunto  $\mathfrak{X}$ . Na Fig. 3, a partícula  $\chi$ , representada pela circunferência tracejada, está ocupando a posição sinalizada pelo ponto  $P$ . As componentes da velocidade de  $\chi$  são representadas pelos três vetores ortogonais colocados sobre  $P$ . Os pontos em vermelho representam as posições ocupadas pelas partículas vizinhas  $\chi_m$ . Como se percebe,  $\mathfrak{X}$  está todo envolto por uma superfície que contém uma região do espaço, a qual é identificada como o volume de fluido em um instante de tempo  $t$ . Não obstante, ao se definir que  $\mathfrak{X}$  possui uma envoltória convexa congruente a um paralelepípedo, por exemplo, isto não quer dizer que a divergência nula do conjunto possa ser tomada como a explicação desejada para a condição de incompressibilidade segundo (1). A restrição de movimento existe essencialmente para cada partícula.

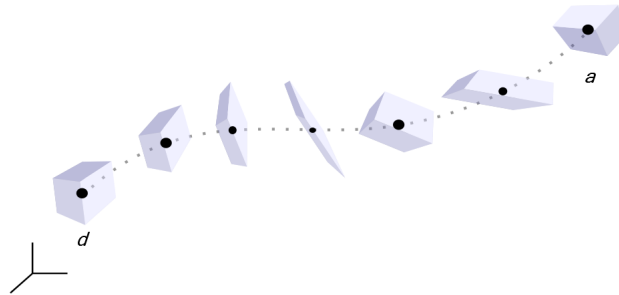


Figura 5: Trajetória do conjunto de partículas  $\mathfrak{X}$  que constitui um elemento de fluido.

A Fig. 3 mostra a trajetória do conjunto de partículas  $\mathfrak{X}$  que constitui um elemento de fluido.  $\mathfrak{X}$  viaja no espaço entre o ponto de partida  $x_d$  e o ponto de chegada  $x_a$ , os quais são os pontos extremos designados pelas letras “d” e “a” no esquema. A partícula  $\chi$  está identificada pelo ponto negro em destaque. O elemento de fluido deforma-se ao longo do percurso perdendo a geometria cúbica. A restrição interna existente que vai caracterizar a incompress-

sibilidade é perceptível pela mudança de geometria em cada instante intermediário entre os pontos extremos, porém, o (módulo do) volume não se altera. De acordo com a Fig. 3, a derivada atua encolhendo ou alongando o volume asbrato, mas a divergência nula mantém a preservação do volume.

#### 4 Incompressibilidade e o Determinante Jacobiano

Para esta sessão, vamos imaginar o nosso elemento de fluido  $\Omega(t)$  como um cubo infinitesimal. Em relação a um referencial inicial onde a posição é determinada pelo vetor  $\xi$ , definiremos

$$d\Omega_0 = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (19)$$

como sendo o volume do elemento de fluido, para o qual cada  $d\xi_i$  é um comprimento infinitesimal na direção correspondente.

Ao se deslocar de sua posição inicial para outra posição, vamos supor que o elemento de fluido leva consigo um segundo referencial posto sobre si. Este segundo referencial tem uma natureza Lagrangeana e vai acompanhando cada partícula do elemento de fluido durante seu movimento sem que dela escape. Neste referencial, a posição será marcada pelo vetor  $x$  e o volume do elemento de fluido infinitesimal definido por

$$d\Omega = dx_1 dx_2 dx_3, \quad (20)$$

para o qual, assim como para  $\Omega_0$ , cada  $dx_i$  é um comprimento infinitesimal na direção correspondente.

Urge dizer que como as coordenadas  $x_i$  são funções da posição inicial e do tempo, existe uma variação de volume ocorrendo nas dimensões espacial e temporal à medida que o elemento de fluido executa seu movimento. Essa variação é transportada pelo referencial movente e dá-se com a introdução do determinante Jacobiano  $J$  na relação

$$dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} dx_1 dx_2 dx_3, \quad (21)$$

onde

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} = J.$$

A última igualdade juntamente com (19) e (20) permite-nos reescrever (21) como

$$J = \frac{dV}{dV_0}. \quad (22)$$

Esta razão é definida como *dilatação* ou *expansão* do elemento de fluido. Podemos observar que  $d\Omega$  é linearmente proporcional a  $d\Omega_0$  por  $J$ . Na verdade,  $J = J(t)$ , uma função dependente do tempo, e é um determinante de ordem 3 que se expande como

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{vmatrix}.$$

Uma restrição existente para  $J$  é que seja positivo e diferente de zero, pois ele representa uma mudança de referencial. Da mesma forma que pode-se descrever o movimento do elemento de fluido mapeando sua coordenada inicial  $\xi$  em  $x$ , é possível descrever o



movimento inverso mapeando a coordenada  $x$  em  $\xi$ . Logo, para existir um mapeamento inverso, ou melhor, uma função inversa que descreva o movimento inverso do elemento de fluido,  $J$  não pode ser nulo. Resumidamente, os dois mapeamentos, direto e inverso, servem para confirmar, por exemplo, que se uma partícula saindo de uma posição inicial vai para outra posição segundo uma dada trajetória, ela percorre o mesmo caminho para voltar aonde estava. Deste fato, decorre a unicidade do mapeamento inverso.

Veremos que se para qualquer instante de tempo  $J = J(t)$  for unitário, o fluido será incompressível. Ou seja, ao dizer que  $J$  é unitário, estamos afirmando que a dilatação ou expansão do elemento de fluido que ocorre em cada instante do movimento é uma constante e isto se relaciona com a preservação do volume.

As variações que o volume do elemento de fluido sofre com o movimento pode ser quantificada pela avaliação da derivada temporal do Jacobiano  $J$ , a saber,

$$\frac{\partial J(t)}{\partial t}. \quad (23)$$

Cuidado deve ser tomado com a derivada parcial em relação ao tempo daqui para frente, pois consoante [1], devemos interpretar que

$$* \frac{D}{Dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_{\xi} \equiv \text{derivada em relação ao tempo mantendo } \xi \text{ constante,}$$

que é a derivada temporal na descrição Lagrangeana do movimento. Por conveniência, preferimos usar a notação  $\frac{\partial}{\partial t}$  a  $\frac{D}{Dt}$ , que se reserva ao conceito de *Derivada Total*.

A dependência que  $J$  possui de  $t$  vem pelo fato de a forma

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} \quad (24)$$

possuir uma dependência temporal herdada das funções apresentadas em (2).

Usando mais uma vez a notação indicial, (23) pode ser declarada como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right) &= \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left( \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial v_i}{\partial \xi_j}, \end{aligned} \quad (25)$$

uma vez que a derivada lagrangeana da posição é a velocidade do elemento de fluido.

Agora, de (2) e (4), com uso da notação indicial apresentada em (24), segue pela regra da cadeia que

$$\frac{\partial v_i}{\partial \xi_j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_j}. \quad (26)$$

Para calcular a derivada do determinante, procedemos como mostrado na Seção 6. O índice  $k$  embute uma somatória que está presente em 3 determinantes que surgem no cálculo da derivada, observando que as 9 entradas da matriz de terceira ordem são as derivadas encontradas em (25), as quais, por sua vez, são dependentes de  $t$ . Os cálculos são mostrados entre as Eqs. (35 - 43).

Por outro lado, (43) é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem e pode ser posta na forma

$$\frac{\partial J(t)}{\partial t} = \alpha J(t),$$

com  $\alpha = (\nabla \cdot v)$ . Sendo  $\alpha$  um número real, a solução de (4) é dada por

$$J(t) = e^{\alpha t}.$$

Portanto, se o fluido é incompressível, então a condição  $\alpha = 0$  implica  $J(t) = 1$  para qualquer instante  $t$ . Assim, basta substituir  $J(t)$  em (22) para se obter

$$d\Omega_0 = d\Omega,$$

isto é,  $J(t)$  é constante e o volume do elemento de fluido é preservado durante o movimento, como afirmamos anteriormente.

## 5 Incompressibilidade e Potências Virtuais

O Princípio das Potências Virtuais (ou de d'Alembert) tenta descrever os esforços que agem sobre um elemento de fluido em movimento baseado em formulações variacionais dos problemas aplicados à Mecânica do Contínuo. Veremos adiante, sucintamente, que a incompressibilidade dos fluidos também pode ser explicada pela vertente do Cálculo das Variações. Em conformidade com o exposto no trabalho de [3], o ensaio para esta sessão segue.

Tomando o nosso elemento de fluido  $\Omega$ , a ideia de *movimento virtual* é expressa pela imagem de uma dada função definida como:

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) : \Omega(t) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (27)$$

onde  $\mathbf{w}$  é um campo de *velocidades virtuais*. Neste ponto, torna-se útil definir  $\mathcal{W}$  como o conjunto de *movimentos virtuais* para o elemento de fluido, isto é, cada movimento virtual determinado por  $\mathbf{w}$  é um elemento de  $\mathcal{W}$ .

Quando no conjunto de movimentos possíveis for estimulada a criação de um subconjunto de movimentos que obedeça à uma certa lei, diz-se que uma *ligação* (em sentido similar ao conceito de restrição) foi imposta ao movimento. Dessa maneira, uma ligação imposta pode caracterizar uma limitação ao movimento do elemento de fluido.

Supondo que uma porção de fluido esteja completamente confinada em uma região limitada por paredes rígidas, no caso de fluidos incompressíveis, dois tipos de ligações passam a fazer sentido:

- i) *Ligação cinemática*. A velocidade do fluido sobre as paredes rígidas é nula em todo ponto:

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = 0.$$

A ligação imposta não permite, portanto, que haja movimento algum na região parietal. Se uma força exterior  $\mathbf{f}$  exercida pelas paredes sobre o fluido estiver presente ao longo do movimento, a potência virtual que ela desenvolve em um movimento virtual determinado por  $\mathbf{w}$  é

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dS. \quad (28)$$

Assim, o conjunto de movimentos compatíveis com esta ligação é dado por

$$\mathcal{W}_1 := \{\mathbf{w} \in \mathcal{W}; \mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ em } \partial\Omega\}.$$

O segundo tipo de ligação é uma

- ii) *Ligação interna*. O campo de velocidades satisfaz à relação

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

de acordo com (1). Neste tipo de ligação, a pressão hidrostática  $p$  no seio do fluido é a responsável por fazer oposição à variação de volume. A potência virtual dos esforços de pressão é dada por

$$\iiint_{V(t)} p \nabla \cdot \mathbf{w} dV. \quad (29)$$

Por outro lado, o conjunto de movimentos compatíveis com esta ligação (com a incompressibilidade, em si) é dado por

$$\mathcal{W}_2 := \{\mathbf{w} \in \mathcal{W}; \nabla \cdot \mathbf{w} = 0 \text{ em } \mathbb{R}^3\}.$$

Pela ótica das formulações variacionais, um problema envolvendo fluidos incompressíveis é caracterizado pela instituição de espaços vetoriais bem definidos, como é o caso de  $\mathcal{W}_1$  e  $\mathcal{W}_2$ . Além disso, um problema cuja *ligação de incompressibilidade* seja imposta estará bem definido em um conjunto  $\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$ .

## 6 Apêndice

### Determinante de uma Matriz $n \times n$

O determinante é um número calculado a partir de todos os elementos de uma matriz quadrada. Se  $ij \dots p$  for uma permutação dos primeiros  $n$  inteiros  $1, 2, \dots, n$  ela é chamada par ou ímpar de acordo com a maneira pela qual a ordem natural pode ser restaurada por um número par ou ímpar de substituições. Assim, 312 é uma permutação par pois exige duas substituições para retornar à ordem 123, por exemplo, ao substituímos 1 por 3 e, em seguida, 2 por 3, ou então 1 por 2 e, em seguida, 1 por 3. Ao contrário, 132 é uma permutação ímpar, pois exige apenas uma substituição (de 2 por 3).

O cálculo do determinante de uma matriz  $A_{n \times n}$  segue como:

$$\det A = |A| = \sum \pm a_{1i} a_{2j} \dots a_{np},$$

onde a somatória age sobre todas as permutações  $i, j, \dots, p$  de  $1, 2, \dots, n$  e o sinal concorda com a paridade da permutação. Em particular, para um determinante  $3 \times 3$ , temos os índices

$$1i, 2j, 3p,$$

com  $i, j, p = 1, 2, 3$ . Seguem, portanto, 6 permutações, entre as quais 123, 231 e 312 serão seguidas pelo sinal positivo e 132, 213 e 321 serão seguidas pelo sinal negativo. Logo,

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + \\ &+ a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - \\ &- a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}. \end{aligned} \quad (30)$$

### A Derivada do Determinante de uma Matriz $n \times n$

Se os elementos de uma matriz são funções de alguma variável como, por exemplo,  $a_{ij} = a_{ij}(t)$ , então a derivada de  $|A|$  com respeito a  $t$  é a soma dos  $n$  determinantes obtidos pela substituição de uma linha (ou coluna) pelas derivadas de seus elementos. Isto provém de (30) quando se aplica diretamente o operador de derivação sobre  $|A|$ . Operando com  $\frac{\partial}{\partial t}$  sobre (30) com a hipótese de que  $a_{ij} = a_{ij}(t)$  e usando a regra do produto, temos:

$$\frac{\partial}{\partial t}(|A|) = \frac{\partial}{\partial t}(|A|_1) + \frac{\partial}{\partial t}(|A|_2) + \frac{\partial}{\partial t}(|A|_3), \quad (31)$$

com

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(|A|_1) &= \frac{\partial}{\partial t}(a_{11})a_{22}a_{33} + \frac{\partial}{\partial t}(a_{12})a_{23}a_{31} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial t}(a_{13})a_{21}a_{32} - \frac{\partial}{\partial t}(a_{11})a_{23}a_{32} \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial t}(a_{12})a_{21}a_{33} - \frac{\partial}{\partial t}(a_{13})a_{22}a_{31},
\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(|A|_2) &= a_{11}\frac{\partial}{\partial t}(a_{22})a_{33} + a_{12}\frac{\partial}{\partial t}(a_{23})a_{31} \\
&\quad + a_{13}\frac{\partial}{\partial t}(a_{21})a_{32} - a_{11}\frac{\partial}{\partial t}(a_{23})a_{32} \\
&\quad - a_{12}\frac{\partial}{\partial t}(a_{21})a_{33} - a_{13}\frac{\partial}{\partial t}(a_{22})a_{31}
\end{aligned} \tag{33}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(|A|_3) &= a_{11}a_{22}\frac{\partial}{\partial t}(a_{33}) + a_{12}a_{23}\frac{\partial}{\partial t}(a_{31}) \\
&\quad + a_{13}a_{21}\frac{\partial}{\partial t}(a_{32}) - a_{11}a_{23}\frac{\partial}{\partial t}(a_{32}) \\
&\quad - a_{12}a_{21}\frac{\partial}{\partial t}(a_{33}) - a_{13}a_{22}\frac{\partial}{\partial t}(a_{31})
\end{aligned} \tag{34}$$

## Cálculos Complementares

Pela Eq. (25), formamos o primeiro determinante

$$|J|_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \xi_3}{\partial \xi_3} \end{vmatrix}.$$

As entradas da primeira linha são, em sequencia,

$$\begin{aligned}
J_{1,11} &= \frac{\partial v_1}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_1} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + \\
&\quad + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1},
\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
J_{1,12} &= \frac{\partial v_1}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_2} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} + \\
&\quad + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2}
\end{aligned} \tag{36}$$

e

$$\begin{aligned}
J_{1,13} &= \frac{\partial v_1}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_3} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} + \\
&\quad + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3}.
\end{aligned} \tag{37}$$

Usando (32), somos levados a

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (|J|_1) = \\ & J_{1,11} \left( \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \right) + J_{1,12} \left( \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \right) \\ & + J_{1,13} \left( \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \right) - J_{1,11} \left( \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \right) \\ & - J_{1,12} \left( \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \right) - J_{1,13} \left( \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \right) \end{aligned} \quad (38)$$

Ao simplificar o cálculo anterior, verificamos que os coeficientes que acompanham os termos em que o índice  $k = 2$  ou  $k = 3$  se cancelam e obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} (|J|_1) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} J, \quad (39)$$

pois o coeficiente que acompanha  $\frac{\partial v_1}{\partial x_2}$  é justamente a expressão do determinante  $J$ , a qual possui a mesma forma de (30). O segundo e terceiro determinantes são dados, respectivamente, por

$$|J|_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{vmatrix}$$

e

$$|J|_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_3} \end{vmatrix}.$$

Notamos que as derivadas dos últimos dois determinantes agora são calculadas sobre as entradas da segunda e terceira linhas, respectivamente. Então, procedendo de maneira similar aos cálculos de (35-38), com o uso de (33) e (34), obtemos após vários cancelamentos dos termos

$$\frac{\partial}{\partial t} (|J|_2) = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} J \quad (40)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} (|J|_3) = \frac{\partial v_3}{\partial x_3} J. \quad (41)$$

Finalmente, por (31), somamos (39), (40) e (41), concluindo que

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) J, \quad (42)$$

ou ainda, reduzindo à forma de (12),

$$\frac{\partial J}{\partial t} = (\nabla \cdot \mathbf{v}) J. \quad (43)$$

## Referências

- [1] R. Aris. *Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. General Publishing Company, Toronto, Ontario, 1989.
- [2] G. K. Batchelor. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, New York, 2002.
- [3] Calculus Laboratory, Brazilian Center for Research in Physics. *Inequations Variationnelles en Mecanique des Milieux Continus*, Rio de Janeiro, jan 1978.
- [4] C. Truesdell and K. R. Rajagopal. *An Introduction to the Mechanics of Fluids*. Birkhäuser, 2000.